直下型航空機レーザー測距による林冠体積推定における系統誤差に関する一考察

A Theoretical Examination of Systematic Error in Crown Volume Estimation from Line-Transects by Airborne Laser Altimetry

鈴木 保志・都築 勇人・後藤 純一・末田 達彦

Suzuki, Y., Tsuzuki, H., Gotou, J. & Sweda, T.

キーワード: 樹冠形状, 期待値, LiDAR, 林冠断面, 林分蓄積

要約: 直下型の航空機レーザー測距で林冠断面を計測し, 毎木調査結果と対応させて広範囲の林分蓄積量等を推定する場合, レーザーが切り取る垂直方向の林冠断面は立木の中心を通過しているとは限らないため, 樹冠形状や立木密度によってはその林分を代表する標本断面とはなっていない可能性がある. そこで単木単位で樹冠断面から推定される樹冠投影立体体積の期待値を理論的に考察すると, 樹冠形状に関わらず推定に偏りはないものと考えられた. ただし推定値のばらつきは林冠閉鎖度が疎になるほど, また樹冠形状が先細りになるほど大きくなることが示唆された.

Abstract: Previous studies have revealed wide variation in forest stand volume estimations derived from forest canopy profiles that were detected using a line-transect method of airborne laser altimetry, or LiDAR (Light Detection and Ranging). We suggest the possibility that a detected canopy profile may not accurately represent the true stand profile. For example, a vertical profile detected by LiDAR may not always intersect the tree crown centerline. We theoretically examined projected individual crown volume, which is normally estimated using the corresponding individual vertical crown profile. The results

Received August 28, 2009; Accepted January 5, 2010

suggest there should theoretically be no bias in the projected crown volume, regardless of crown profile. On the other hand, the results also suggest that variation in projected crown volume can be greater when the canopy is not closed and/or when the crown features a sharper top.

Keywords: Canopy profile, crown shape, expectation, LiDAR, stand volume

1. はじめに

航空機レーザー測距は, 直進性の高いレーザー光線を用いる LiDAR (Light Detection and Ranging) と呼ばれる測距システムを航空機に搭載する計測方法であり, 森林の計測においては, 林冠に反射する First pulse と林冠を通過して地面などに反射する Last pulse との差から樹高を計測する手法が確立されて以来, 広範囲の森林資源量を把握するひとつの有力な方法となっている (秋山, 2007a, 2007b). 当初はレーザーの照射方向を航空機直下に固定した直下型 (レーザープロファイラー) が主として用いられていたが, 近年では航空機の進行方向に対して直角方向にレーザー光を走査する走査型 (レーザースキャナー) が用いられるようになってきた (平田, 2005a). 走査型測距を森林計測に応用した研究では, 密な計測により単木単位での材積推定 (Takahashi *et al.*, 2005) や地形因子と関連させるための樹高の推定 (平田, 2005b) などが行われており, 仔細な検討を要する目的に対してより効果的な応用が可能な性質を持っていると言えるであろう. 一方, 直下型は限られた予算でより広範囲な測定を対象にするような場合には現在でも効果が高い方式であり, カナダ西部亜寒帯林における延長約 600km の植生断面のトランセクト計測 (都築ら, 2006), シベリア亜寒帯林における延長約 200km の同様の計測 (日下部ら, 2006), トランセクト間隔を約 4km にしての愛媛県全域の計測 (Tsuzuki *et al.*, 2008, 末田, 2009) などが実施されている.

これら直下型の航空機レーザー測距を用いた研究では, グラウンドトゥルースとしてレーザー計測された森林にいくつかの毎木調査プロットを設け, 面積あたりの林分蓄積 V と距離あたりの断面プロファイル面積 S を対応させている. 目的は, 得られた回帰式を用いて全計測地域の林分蓄積

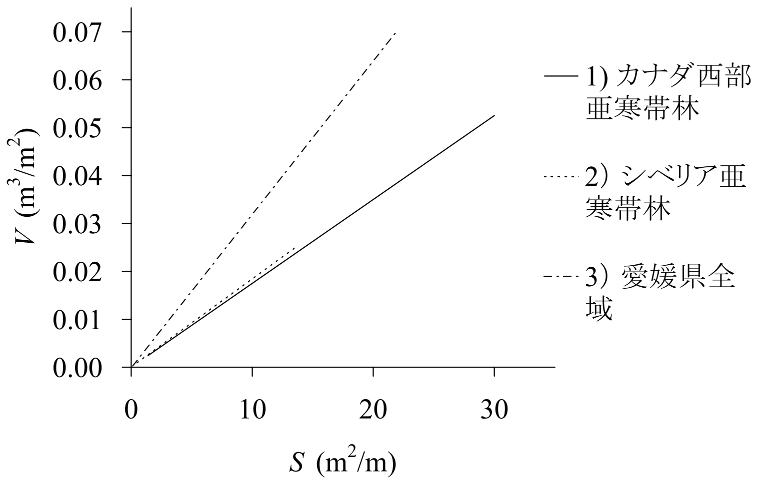

図 1. 既往の研究における林分蓄積 V $(\mathrm{m}^3/\mathrm{m}^2)$ と断面プロファイル S $(\mathrm{m}^2/\mathrm{m})$ との関係

注) $V = a \cdot S$; 1)1997 年計測, $n = 47$, $a = 1.75 \times 10^{-3}$, $r = 0.86$, 都築ら (2006); 2) 2000 年計測, $n = 10$, $a = 1.85 \times 10^{-3}$, $r = 0.89$, 日下部ら (2006); 3) 2005-2007 年計測 (中間結果), $n = 34, a = 3.19 \times 10^{-3}, r = 0.75 - 0.87$, Tsuzuki *et al.* (2008).

を精度よく推定することである (同じく S を説明変数として葉面積指数やバイオマス量の推定も行われている). 都築ら (2006) は V と S の間に [1] 式のような 1 次関係が成り立つとした (理論的背景は後述).

[1] $$V = a \cdot S$$

ここで, V は単位面積あたりの林分蓄積 ($\mathrm{m}^3/\mathrm{m}^2$; 原著では m^3/ha だが本論ではこの単位を用いる), a は係数 (無次元), S は距離あたりの断面プロファイル面積 (m^2/m; 原著では m^3/m としているものもある) であり, V と S はどちらも長さの 1 乗の次元を持つ. 都築ら (2006), 日下部ら (2006), Tsuzuki *et al.* (2008) では a として $1.75 \times 10^{-3} \sim 3.19 \times 10^{-3}$ が得られている (図 1).

以下, 都築ら (2006) にもとづいて [1] 式の理論的背景を説明する. V は前述のように林分蓄積 (単位面積あたりとする) である. 上面を林冠 (都築

ら, 2006, では「樹冠」となっているが林分単位であることを明確にするため本論文では「林冠」を用いる) 面, 下面を地面で規定された森林空間の体積 (やはり単位面積あたりとする) を S' とする (都築ら, 2006, では S' にも S の記号を用いているが本論文では違いを明確にするため異なる記号を用いる). V と S' は同じ森林の異なる部位を表すことになるのでアロメトリー関係が成り立つものとすると

[2] $$V = a \cdot {S'}^K$$

が得られ, さらに次元解析の論理に従い $K = 1$ とするのが妥当であると考えれば

[3] $$V = a \cdot S'$$

が得られる (アロメトリー式に次元解析を適用することの妥当性については「4. おわりに」で議論する).

S' は上述の定義に従えば, 当該林分の林冠表面であらわされる曲面の関数 (値は地面から曲面までの垂直距離) を平面座標 (x, y) の両方向について二重積分することで求められ, 走査型の航空機レーザー測距を用いれば直接的に計測することができる. ここで都築ら (2006) は, 直下型の航空機レーザー測距で S' を求めるために, 次のような仮定をおいた. すなわち, 当該林分の林冠面が y 方向に均一であり, 林冠表面の x 方向の積分値 S_x (直下型航空機レーザー測距で計測される断面プロファイルの面積) を, $y_1 \approx y_2$ の y_1 と y_2 に対してほぼ等しい $(S_x(y_1) \approx S_x(y_2))$ とみなすことができる, という仮定である. この仮定が有効ならば, S' を求める際に必要な y 方向の積分は当該林分の y 方向の辺長 l_y (x 方向の辺長は l_x) でおきかえることができ,

[4] $$S' \cdot (l_y \cdot l_x) = l_y \cdot S_x$$

となる (左辺は S' に林分の面積をかけて体積に戻している). [1] 式の説明で記したように S は距離あたりの S_x, つまり上端を林冠面, 下端を地面で規定された林分の断面プロファイルの距離あたり面積であるから

$S_x = S \cdot l_x$ であり, [4] 式は

[5] $$S' = S$$

となる. すなわち [5] 式を [3] 式に代入して [1] 式を得る.

都築ら (2006) では「当該林分の林冠面が y 方向に均一」という仮定をおいているが, 必ずしも均一でなくても, 直下型航空機レーザー測距で計測した断面プロファイルが当該林分の代表的な断面プロファイルであれば [4] 式は成立つ. そこで本論文では, [1] 式の説明変数である S が林分 (植生) の代表的な林冠断面 (植生断面) を表しているかどうかについて, 理論的に考察することを目的とする. 直下型レーザーが切り取る樹冠断面は必ずしも単木の中心を通過するわけではないことから, レーザーによる断面プロファイルは対象林分の林冠断面の推定値としてはなんらかの偏りがあることが考えられるためである.

一方, 実測データにもとづいた回帰分析で得られた [1] 式の関係には, 例えば S に示される断面プロファイルでは陽樹冠と陰樹冠の区別 (Takahashi *et al.*, 2005) はされていないといったこともあわせて回帰誤差に含まれていると考えられるので, そのような偏りがあっても実用上大きな不都合はない. とはいえ, 上に述べたような理論上の仮定に起因する誤差の可能性を検討しておくことは, [1] 式による推定の精度を上げるためには有効と考えられる. なおレーザー測距ではレーザーが林冠を通過して地面をとらえることもあるが, 本論文ではそのような計測誤差については議論しないこととする.

2. 方法

2.1. 定式化

図 2a のような森林を直下型航空機レーザーで計測し, レーザーの計測線 (トランセクト) を中心線とするプロット (長さ l_x (m), 幅 l_y (m)) を設け, 毎木調査によりプロット内の蓄積量 v (m^3) が得られたとする. また, レーザートランセクトのうちプロットを通過する部分 (図 2b) を抽出して得られた断面プロファイルの面積 (図 2c) を s (m^2) とする (実際の断面プ

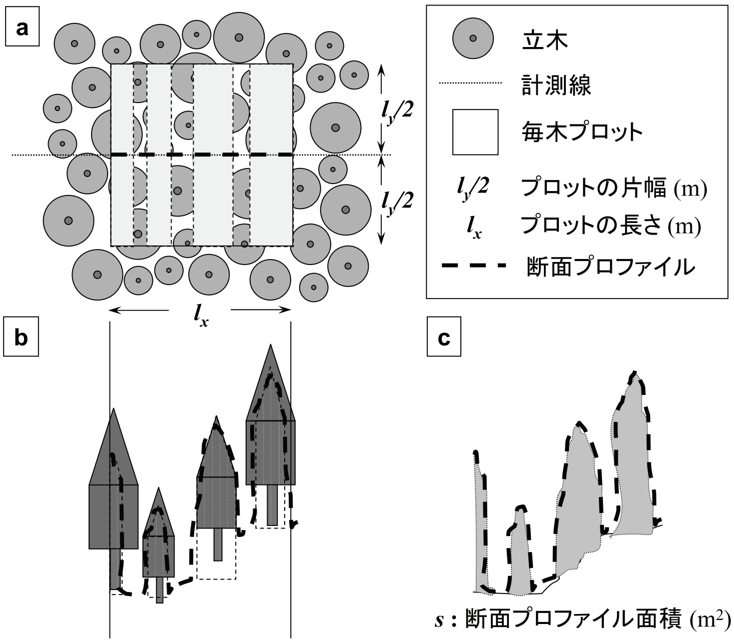

図 2. 直下型レーザーによる林冠断面計測の模式図

注) a: 平面図, b: 縦断面図, c: 計測された林冠断面.

ロファイルは地盤高の補正を入れて底面が直線になるように変換される). [1] 式の S (単位長さあたり断面積, m^2/m) は [6] 式で表される.

$$[6] \qquad S = \frac{s}{l_x}$$

プロット内の S' (m^3/m^2) は, 上面を林冠面, 下面を地面で規定された空間の体積 v'_c (m^3) をプロットの面積 $l_x \cdot l_y$ (m^2) で割って得られる ([7] 式). なお, [1] 式の $V = v/(l_x \cdot l_y)$ である.

$$[7] \qquad S' = \frac{v'_c}{l_x \cdot l_y}$$

[1] 式は V と S の間の線型関係を表しているが, 前節で述べたように, 都築ら (2006) は [1] 式を導く過程で [3] 式のように V と S' が比例関係に

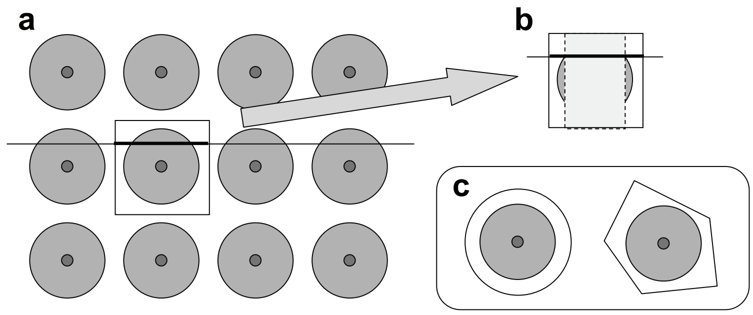

図 3. 単木単位での考察

注) a: 格子状の一斉林, b: 単木の抽出と正方形の占有領域, c: 円形 (左) あるいはボロノイ多角形 (右) の占有領域.

あるものとしている．そして, S の計測で S' を置きかえることができる, あるいは S は S' の妥当な推定値であるという前提のもとに [1] 式は成り立っている．ここで

[8] $$S \approx S'$$

とすると, [8] 式に [6], [7] 式を代入して

[9] $$s \cdot l_x \approx v'_c$$

を得る．これは, プロット内の v'_c (図 2a) が, プロット内の林冠の断面プロファイル s (図 2c) をプロットの横幅にわたって広げた立体図形の体積と等しいということを意味している．すなわち, 直下型レーザー測距を用いて林分蓄積量を精度よく推定するためには, [8] 式が成り立つことが必要ということになる．以降本論文では, この関係について検討する．

問題を単純化するために, 図 3a のように格子状に等間隔に同じ大きさの立木が存在している一斉林を想定する．樹冠の投影形状は幹を中心とした円形とする．単木に着目すると, 単木の占有する領域は図 3b のように隣接する立木との中間線を繋いだ正方形になる．林分 (図 3a) はこの同じ正方形を連ねたものなので, 林分全体についてのレーザー測距の考察は, 図 3b の単木の占有領域についての考察で置き換えることができると考えられる．

さらに, 航空機レーザーによる計測線は立木が配置されている格子線に平行な場合のみを考え, 占有領域の正方形のいずれかを通過するものとする. このように想定することで, 計測線が通る位置により樹冠が計測線にかかるか否かを表現することができる. また, 占有領域の幅に対する樹冠投影円の大きさを変えることで, 立木が密な状態と疎な状態を表現することも可能である.

なお, 占有領域は, あるいは図 3c 左のように円形とする方が, 計測線の方向に関係しなくなるため, より適当かもしれない. また立木 (樹冠) サイズが異なったり図 2a のように格子状の配置でなかったりする場合には, 占有領域は図 3c 右のようなボロノイ多角形 (室田, 1993) となると考えられる (図 2a の条件では図 3b もボロノイ多角形である).

2.2. 検討対象の図形と図形毎の断面プロファイル

樹冠を表す立体図形としては, 円筒 (底面の半径 r , 高さ h; 図 4), 半球 (半径 r; 図 5a), 円錐 (底面の半径 r , 高さ h; 図 5b) の 3 種類をとりあげる. 実際の樹冠投影立体 (上面を樹冠面, 下面を地面で規定された立体空間) は複雑な形状をしているはずであるが, これら 3 種類の図形について考察しておけば, これらの組合せで実用上は十分な検討を行うことができると考える.

3 次元直交座標の原点に樹冠投影立体の底面の中心と占有領域 (一辺 $2w$ の正方形) の中心をおく. 直下型レーザーの計測線は y 軸に平行で, $|x| \leq w$ の範囲のある位置を通過するものとする. 樹冠投影立体を切り取る断面プロファイルの面積は x の関数であり, これを $s(x)$ とすると, $s(x)$ は [10], [11] 式で表される.

[10] $$s(x) = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} z(y)dy \qquad (|x| \leq r)$$

[11] $$s(x) = 0 \qquad (r < |x| \leq w)$$

ここで, r は樹冠投影立体の底面の半径, w は正方形の占有領域の 1 辺の 1/2 である ($r \leq w$). $z(y)$ は断面プロファイルの高さで, 一般には y の関

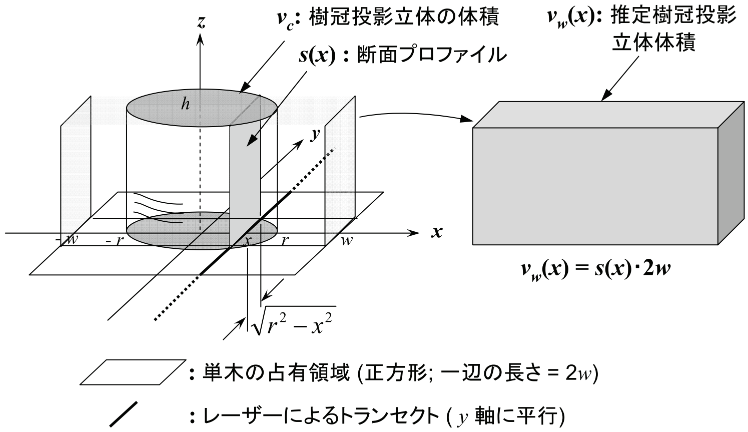

図 4. 単木の樹冠投影立体体積の推定の模式図

注) 半径 r, 高さ h の円筒の場合

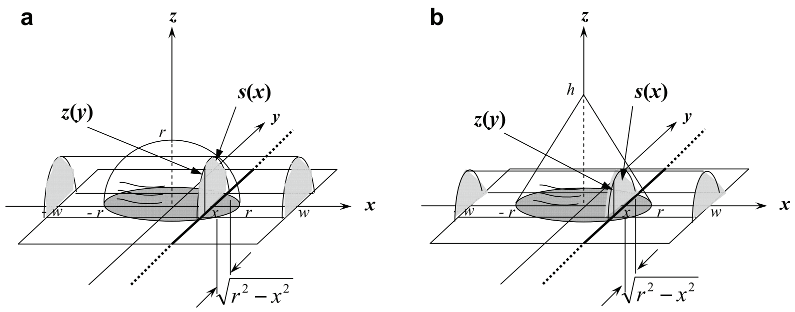

図 5. 単木の樹冠投影立体体積の推定

注) a: 半径 r の半球形の場合, b: 半径 r, 高さ h の円錐形の場合

数であり (円筒形の場合は定数), 円筒形 (図 4), 半球形 (図 5a), 円錐形 (図 5b) のそれぞれについて [12], [13], [14] 式のようになる.

[12] $$z_{Cylinder}(y) = h$$

[13] $$z_{Hemisphere}(y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

[14] $$z_{Cone}(y) = \frac{h}{r}\left(r - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

[10] 式に [12], [13], [14] 式を代入して積分することにより, 円筒形 ([15] 式), 半球形 ([16] 式), 円錐形 ([17] 式) の $s(x)$ を得る.

[15] $$s_{Cylinder}(x) = 2h \cdot r\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

[16] $$s_{Hemisphere}(x) = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \left\{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

[17] $$s_{Cone}(x) = h \cdot r\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} + \left(\frac{x}{r}\right)^2 \log\left|\frac{\frac{x}{r}}{1 + \sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}}\right|\right\}$$

[17] 式の導出過程で, $\sqrt{x^2 + c}$ の形式を持つ関数の不定積分に関しては, 森口ら (1956) の公式を用いた. なお, [15], [16], [17] 式および以下においては, x の樹冠 (半径 r) 内での相対位置を分かりやすくするために, x の関わる項はできるだけ x/r のかたちで表すようにしている.

2.3. 樹冠投影立体体積の推定誤差の指標 E_r

断面プロファイルによる占有領域内の樹冠投影立体体積の推定値 $v_w(x)$ も x の関数で, 2.1 で検討したように次式で表すことができる.

[18] $$v_w(x) = s(x) \cdot 2w$$

前出の [9] 式は, この [18] 式で表される推定樹冠投影立体体積 $v_w(x)$ と樹冠投影立体の体積 v_c (林冠については v'_c を用いたが樹冠については v_c を用いることとする) がほぼ等しいことを表現していた. これはすなわち, 両者の比

[19] $$E_r(x) = \frac{v_w(x)}{v_c}$$

が 1 であることと等値である. 本論文では, [19] 式の $E_r(x)$ を樹冠投影立体体積の推定誤差の指標 (推定誤差比) とする. なお, 樹冠投影立体の体積

v_c は, よく知られているように [20], [21], [22] 式の通りの定数である.

[20] $$v_{c.Cylinder} = \pi \cdot r^2 h$$

[21] $$v_{c.Hemisphere} = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$$

[22] $$v_{c.Cone} = \frac{h}{3}\pi \cdot r^2$$

v_c は初等幾何の方法でも求められるが, 積分の定義に従って [23] 式のように $s(x)$ を $|x| \leq r$ の範囲について積分することからも得ることができる.

[23] $$v_c = \int_{-r}^{r} s(x)dx$$

次節では, 以下の事項について検討する. まず, $E_r(x) = 1$ となる x を x_{even} とすると, x の定義域 $|x| \leq w$ (レーザーの計測線の位置 x はこの範囲内のいずれかの値を一様な確率でとる) と対応させることで, レーザー計測による樹冠投影立体体積が過大推定 ($v_w(x) > v_c$, $E_r(x) > 1$) あるいは過小推定 ($v_w(x) < v_c$, $E_r(x) < 1$) になる確率を知ることができる. この検討は, w と r の比 (w/r) を変えることで, 林冠閉鎖度が高い場合 $(w/r \approx 1)$ と低い場合 $(w/r \gg 1)$ について行うことが可能である.

次に, 推定誤差比 $E_r(x)$ の期待値について検討する. $E_r(x)$ の期待値 $E[E_r(x)]$ は確率統計学における定義 (小針, 1973) により

[24] $$E[E_r(x)] = \int_{-w}^{w} E_r(x) \cdot \rho(x)dx$$

で求められる. ここで $\rho(x)$ は $E_r(x)$ の確率密度関数で, 本論文では x の定義域 $(|x| \leq w)$ にわたり一様に分布すると仮定していることから,

[25] $$\rho(x) = \frac{1}{\int_{-w}^{w} 1\ dx} = \frac{1}{2w}$$

である. 推定誤差比の期待値が 1 に近いか否かで, [8] 式が成り立つと言えるかどうかが検証できる. すなわち $s(x)$ から v_c を推定する場合の系統誤差の有無を知ることができる. また, 樹冠形 (円筒・半球・円錐) あるいは

林冠閉鎖度 (w/r) による相違も検討可能である.

最後に, 推定誤差比の分散 $Var[E_r(x)]$ について検討する. $Var[E_r(x)]$ の大小は, $s(x)$ から v_c を推定する場合の残差の大きさを示す. 従って, この大小に影響を与える要因を考察することで, [1] 式のように S で V を回帰する場合の残差の原因の一部を推察することが可能と考えられる. $Var[E_r(x)]$ は $E_r(x)$ の $E[E_r(x)]$ のまわりの分散 (小針, 1973) として, [26] 式で計算される.

[26] $$Var[E_r(x)] = \int_{-w}^{w} \{E_r(x) - E[E_r(x)]\}^2 \cdot \rho(x)dx$$

$\rho(x)$ は [24] 式と同様に, 本論文の場合は [25] 式で表される定数である.

3. 結果と考察

3.1. 推定樹冠投影立体体積が過大あるいは過少となる確率

x_{even}(推定誤差比 $E_r(x)$, [19] 式, が 1 になる x) を円筒形, 半球形について求め, r に対する比 $(x_{even}/r$) として表すと, それぞれ [27], [28] 式のようになる.

[27] $$\frac{x_{even}}{r} = \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{16} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^2}$$

[28] $$\frac{x_{even}}{r} = \sqrt{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{w}}$$

円錐形については $E_r(x)$ が [29] 式のように表されるため, 式から x_{even} を解くことはできない.

[29] $$E_r(x) = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{w}{r} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} + \left(\frac{x}{r}\right)^2 \log \left| \frac{\frac{x}{r}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \right| \right\}$$

そこで, 円錐形については数値計算により x_{even} を求めた (図 6; ただし w/r は 1 ～ 2 の間で 1/8 刻みとした). 図 6 から, x_{even}/r は円筒, 半球, 円錐の順に小さくなること, 林冠閉鎖度の指標である w/r との関係では w/r が増大するにつれて増加率が逓減しつつ増加することがわかる. 前者は, それぞれの立体がこの順に, 中心線から外周部に向かうにつれて z 軸

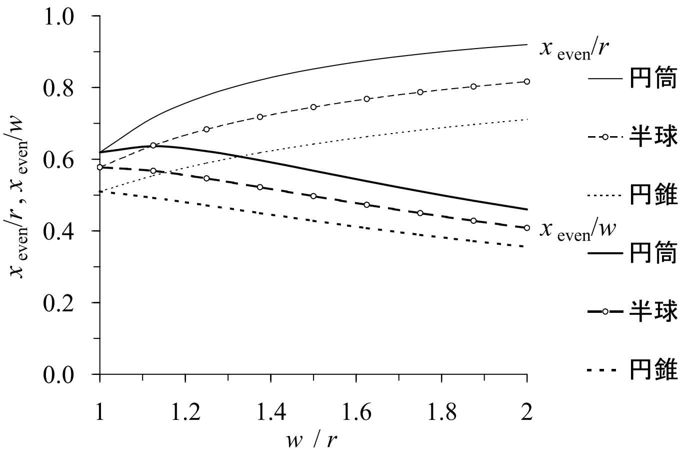

図 6. 推定誤差比 $E_r(x)$ が 1 になる側線位置 (x_{even}) の樹冠半径 (r) および占有領域の幅の $1/2(w)$ に対する比と w/r との関係

注) x_{even}/w は推定誤差比が 1 以上になる確率と同等の意味を持つ.

方向での断面積が小さくなる度合いが大きくなることを反映している. 後者は, 林分が疎になるにつれて, 単木の占有領域に占める面積あたりの樹冠投影立体体積が小さくなるためである. なお, [29] 式の右辺に h は含まれていないことから, 円錐形に関して $E_r(x)$ は h に関係しないことがわかる. これは円筒形の場合も同様で, [19] 式で $v_w(x)$ と v_c の比をとった段階で式から h は消える. すなわち $E_r(x)$ に関して本論文で考察する図形に関しては, 高さは影響しない.

次に, レーザー計測により推定される樹冠投影立体体積が過大推定になる確率 $(P\{E_r(x) \geq 1\})$ を考えてみる. これは, 計測線が占有領域のいずれかを通過する $(|x| \leq w)$ という仮定から, w に対する x_{even} の比で定義される.

[30] $$P\{E_r(x) \geq 1\} = x_{even}/w$$

x_{even}/w も円筒, 半球, 円錐の順に小さくなるが, w/r が増大するにつれて円筒形を除いてほぼ一様に減少する (図 6; 太線). 円筒については, w/r

が 1.1 をやや超えるまでは増加し, 極大値を迎えた後は他の図形と同様に w/r の増大につれて一様に減少する．この結果は, 林冠が疎になるにつれてレーザーの計測線が個々の樹冠を外れる場合が多くなることを表現している．図 6 に示した w/r が $1 \sim 2$ の範囲では x_{even}/w はほぼ $0.6 \sim 0.4$ の値をとる．すなわち, 過大推定 (あるいは過少推定) となる確率は大まかに言えばほぼ半々であるが, 円筒形に近い樹冠形状であったり林冠閉鎖度が高かったり ($w/r = 1$ は樹冠投影面積密度にして $\pi/4 \approx 0.785$) すると確率は 0.6 程度まで高くなり, 円錐形に近い樹冠形状であったり林冠閉鎖度が低かったり ($w/r = 2$ の場合樹冠投影面積密度は $\pi/16 \approx 0.196$) すると確率は 0.4 程度まで低下する．なお, 円筒形での極大値については, [27] 式の両辺に r/w を掛けて w/r について微分することにより, $w/r = \pi/\sqrt{8}$ で $x_{even}/w = 2/\pi$ となることが確認できる.

3.2. 推定誤差比の期待値 $E[E_r]$

前項では推定誤差比が 1 を超える確率について検討したが, 実用上は計測対象林分全体としての推定誤差比が 1 に近いかどうかが重要である．これは, 推定誤差比の期待値 $E[E_r(x)]$ が 1 に近いかどうかで判断することができる.

[24] 式に従い $E[E_r(x)]$ を計算すると以下のようになる.

[31]
$$\begin{aligned} E[E_r(x)] &= \int_{-w}^{w} E_r(x) \cdot \rho(x) dx \\ &= \frac{2w}{v_c} \int_{-w}^{w} \frac{s(x)}{2w} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

($E_r(x)$ は [19] 式, $\rho(x)$ は [25] 式を参照, v_c と $s(x)$ の関係については [23] 式を参照.) すなわち, $E[E_r(x)]$ は樹冠形状にかかわらず常に 1 であり, 本論文で仮定した考察の条件が妥当なものならば, 直下型レーザー計測による樹冠投影立体体積の推定では系統誤差はないものと考えられる (あるいは推定樹冠投影立体体積は真の樹冠投影立体体積の不偏推定値である)．特に [23] 式に示した v_c と $s(x)$ の関係は樹冠形に依存しないので, このこと

は実際の複雑な樹冠形状に対しても成り立つ.

3.3. 推定誤差比の分散 $Var[E_r]$

次に, [26] 式に従い推定誤差比の分散 $Var[E_r]$ を導く.

[32]
$$\begin{aligned} Var[E_r(x)] &= \int_{-w}^{w} \{E_r(x) - E[E_r(x)]\}^2 \cdot \rho(x)dx \\ &= 2\int_0^r \left\{\frac{2w}{v_c}s(x) - 1\right\}^2 \cdot \frac{1}{2w}dx \\ &= \frac{4w}{v_c^2}\int_0^r \{s(x)\}^2 dx - 1 \end{aligned}$$

($E[E_r(x)]$ は [31] 式を参照.) 円筒形, 半球形については, それぞれ [15], [16] 式の $s(x)$ を上式に代入して以下の式を得る.

[33]
$$Var[E_r(x)]_{Cylinder} = \frac{32}{3\pi^2} \cdot \frac{w}{r} - 1 \approx 1.081\frac{w}{r} - 1$$

[34]
$$Var[E_r(x)]_{Hemisphere} = \frac{6}{5} \cdot \frac{w}{r} - 1 = 1.2\frac{w}{r} - 1$$

円錐形については, [32] 式に [17] 式の $s(x)$ を代入して

[35]
$$\begin{aligned} &Var[E_r(x)]_{Cone} \\ &\quad = \frac{36}{\pi^2} \cdot \frac{w}{r}\int_0^r \left[\left\{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}\right. \\ &\qquad +2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 \log\left|\frac{\frac{x}{r}}{1+\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}\right| \\ &\qquad\qquad \left. + \left(\frac{x}{r}\right)^4 \left\{\log\left|\frac{\frac{x}{r}}{1+\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}\right|\right\}^2\right] dx - 1 \\ &= \frac{36}{\pi} \cdot \frac{w}{r} \cdot k - 1 \\ &= 1.398744\cdots\frac{w}{r} - 1 \approx 1.399 \cdot \frac{w}{r} - 1 \end{aligned}$$

となる. [35] 式の第 2 式で k とおいている積分部分については, ニュートン-コーツの積分公式 (戸川, 1976; $n = 1$ の台形公式により x/r を変数とし

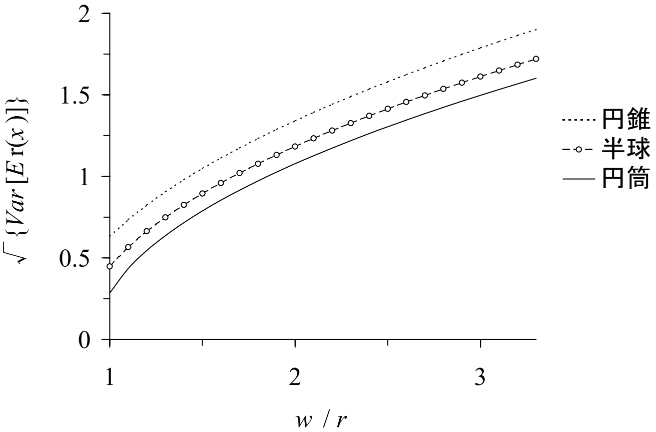

図 7. 樹冠投影立体体積推定誤差比の
標準偏差と林冠閉鎖度の指標との関係

て積分区間 $0 \leq x/r \leq 1$ を 100 等分して計算) を用い, 0.383473609034266 とした.

[33], [34], [35] 式はいずれも $m \cdot (w/r) - 1$ の形式の線形式となっている (m は定数係数). $Var[E_r(x)]$ は分散なので, これの平方根をとり標準偏差として w/r との関係を表すと, 図 7 のようになる. すなわち, 樹冠投影立体体積推定誤差比の標準偏差 ($\sqrt{Var[E_r(x)]}$) は, 円筒, 半球, 円錐の順に大きな値をとる. つまり頂部がすぼまるような形状 (中心線から外周部に向かうにつれて z 軸方向での断面積が小さくなるような形状) であるほど推定誤差比のばらつきは大きくなることを示している. 樹冠形状間の差は 0.1 ∼ 0.2 程度で一定である. w/r との関係については, 林冠閉鎖度が高い $w/r = 1$ (樹冠投影面積密度にして約 0.8) では $\sqrt{Var[E_r(x)]}$ は 0.3 ∼ 0.6 程度の値をとるが, 林冠閉鎖度が高くなり $w/r = 2$(樹冠投影面積密度は約 0.2) になると 1.1 ∼ 1.3 程度, $w/r = 3$ (樹冠投影面積密度約 0.1; $\pi/36$) にまでなると 1.5 ∼ 1.8 程度にまで増大する. すなわち, 樹冠形状が円筒形に近く林冠閉鎖度も高い状態でも, 樹冠投影立体体積の推定においては 0.1 (0.3^2) 程度の誤差分散が付随するものと考えられる.

4. おわりに

本論文で検討した内容を実際の航空機レーザー計測に役立てるためには，定式化の段階で単純化した条件等をより複雑な現実の状態に対応させて検討する必要がある．例えば，樹冠形状をより複雑なものにすること，単木単位でなく林分単位で検討すること，などである．樹冠形については，針葉樹は円錐形 + 円筒形，広葉樹は半球 + 円筒形に近い形状と推察されるが，頂部の部分的な形状の差だけとなると，円筒形と円錐形ほどの差はないということも考えられる．

林冠閉鎖度については，底面が円形の同じ大きさの樹冠を格子状に並べる場合，樹冠投影面積が平面に占める割合は最大で 0.8 程度となる．しかし，林分が密な状態では樹冠が互い違いになって存在するなどして，本論文で検討した $w/r = 1$ よりも計測線が樹冠にかかる確率は高くなる可能性がある．なお，実際のレーザー計測ではレーザーの一部が樹冠の間隙を透過して地面をとらえる場合もある (これを樹冠透過率と呼ぶことにする) ことから，レーザーが直接地面を捕捉する確率は，1 から平面に占める樹冠投影面積の割合を引き，これに樹冠透過率を加えたものに近いという可能性も考えられる．

図 1 に示した既往の研究で得られた V と S の関係式における回帰直線の傾き a の相違は，断面プロファイルの単位量に対する林分蓄積の大きさの差である．1), 2) の亜寒帯林よりも 3) の愛媛県全域で a が大きい原因のひとつとして，3) では人工林が大きな割合を占めていることが考えられる．なお，3) は中間段階での結果ということもあるが，相関係数が 0.75 ~ 0.87 と他の 2 事例 (0.86 ~ 0.89) より低めである．この原因については詳細な検討が必要であるが，本論文での考察を考慮すると，ひとつの可能性として人工林の樹冠形が影響していることがあげられる．つまり，人工林に植えられている樹種の樹冠形 (の特に上部) は，天然林に存在する多くの樹種の樹冠形に比べて円錐形に近い形状をしている (すなわち推定誤差比がより大きくばらつく) と考えられる．本論文で考察した樹冠形と林冠閉鎖度が樹冠投影立体体積推定に与える影響が正しいとすれば，推定誤差比のばらつき ($Var[E_r(x)]$) が大きくなると予想される条件の時には，グラウンド

トゥルースの毎木調査プロットの数やプロットの大きさ (計測線方向の長さ) を, 目的とされる精度に対応して大きくする, などの対応が考えられる.

なお, 回帰分析では, 理論的には説明変数は誤差なく計測されていることを前提としている. 実際には厳密にこの条件を守ることは難しいと考えられるが, 説明変数に誤差があることを考慮して分析を行う方法 (reduced major axis method) も提案されている (Socal and Rohlf, 1995) ことから, 状況によってはそのような方法を適用することも考慮する価値はあるものと思われる.

最後に, 都築ら (2006) による [1] 式の理論的背景でアロメトリー式に次元解析を適用していることの妥当性について考察しておく. アロメトリー理論にもとづいて, 個体の部分の大きさ (Y) と全体または他の部分の大きさ (X) との間に

[36] $$Y = \alpha \cdot X^{\beta}$$

(α, β はパラメータ; 丹下, 1999) あるいは樹幹材積 (W) のような場合は胸高直径 (D) と樹高 (H) を用いて

[37] $$W = A \cdot (D^2 H)^B$$

(A, B はパラメータ; 石森, 1999) といった相対成長式が成立つことが知られている. 都築ら (2006) での [1] 式の導出過程でも V, S それぞれにはそうした非線形の相対成長式が成立つことが仮定されている. 都築ら (2006) と同様の理論的根拠にもとづく日下部ら (2006) の結果では, そうした相対成長式と次元解析を組み合わせて葉面積指数が V あるいは S の 2/3 乗に比例すること, つまり蓄積の増加にともない葉量ひいては成長量が頭打ちになるという森林の生態学的な特徴 (藤森, 2006) を合理的に説明できている. 一方, 都築ら (2006) における [1] 式の理論的根拠の説明では標準木法において D あるいは H の一変数で V を表す場合もあることをとりあげ, 標準木法の拡張としての説明も試みられている. しかし, 場合によってはそのような単純化の適用が妥当でない可能性も考えられる. その場合, S' を S と等しいとする [5] 式が有効でも, [2] 式における K を 1 とおくこと

が妥当ではなくなることから, 例えば K を 1 と固定せずに [36] 式のかたちで V と S の関係を分析するということも有効と思われる.

謝辞

本論文の改稿に際し, 匿名の査読者からは非常に有益な意見をいただいた. ここに記して謝意を表す.

引用文献

秋山 幸秀 (2007a) 樹高 (LIDAR), 改訂 森林リモートセンシング–基礎から応用まで– (加藤 正人 編), pp. 210–213.

秋山 幸秀 (2007b) LIDAR, 改訂 森林リモートセンシング–基礎から応用まで– (加藤 正人 編), pp. 300–303.

藤森 隆郎 (2006) 森林生態学, 全国林業改良普及協会, 480p.

平田 泰雅 (2005a) 航空レーザースキャナーを用いたスギ人工林計測におけるレーザー光の林冠透過率と地上照射密度の影響, 森林計画誌 39: 81–95.

平田 泰雅 (2005b) 航空機レーザースキャナーを用いたヒノキ人工林における樹高と地形との関係, 日林誌 87: 497–503.

石塚 森吉 (1999) 物質生産, 森林立地調査法 (森林立地調査法編集委員会 編), pp. 231.

小針 晛宏 (1973) 確率統計入門, 岩波書店, 300p.

日下部 朝子・都築 勇人・末田 達彦 (2006) シベリア亜寒帯林を対象とした航空レーザー測距法による葉面積指数の広域推定, 日林誌 88: 21–29.

森口 繁一・宇田川 銈久・一松 信 (1956) 岩波 数学公式 I, 岩波書店, 318p.

室田 一雄 (1993) Voronoi 図と Delaunay 網, 計算機科学と地理情報処理 第 2 版 (伊理 正夫・腰塚 武志 編), pp. 126–148.

Socal, R. R. and Rohlf, F. J. (1995) *Biometry* (3rd Ed.), Freeman, 887p.

末田 達彦 (2009) 京都議定書に対応した森林における CO_2 吸収量の広域測定法の開発, 科研費報告書, No. 17201005, 407p.

Takahashi, T., Yamamoto, K., Senda, Y. and Tsuzuku, M. (2005) Predicting individual stem volumes of sugi (*Cryptomeria japonica* D. Don) plantations in mountainous areas using small-footprint airborne LiDAR, *J. Forest Res.* 10: 305–312.

丹下 建 (1999) バイオマスの測定, 森林立地調査法 (森林立地調査法編集委員会 編), pp. 63–64.

戸川 隼人 (1976) 数値解析とシミュレーション, 共立出版, 141p.

都築 勇人・日下部 朝子・末田 達彦 (2006) 航空レーザー測距法によるカナダ西部亜寒帯林の広域森林蓄積推定, 日林誌 88: 103–113.

Tsuzuki, H., Nelson, R. and Sweda, T. (2008) Estimating timber stock of Ehime prefecture, Japan using airborne laser profiling, *J. Forest Plann.* 13: 141–146.